**Analízis**

Sorok és sorozatok konvergenciája. Analitikus függvények, Taylor-sor. Függvények határértéke, folytonossága. Egy- és többváltozós valós függvények differenciálszámítása. Minimum- és maximumhelyek megkeresése. Függvények konvexitása. Valós integrálszámítás, határozott- és határozatlan integrál.

magyarázó, kihagyható részek

Jelmagyarázat:

**I. Sorok és sorozatok konvergenciája**

A képen szöveg, Betűtípus, képernyőkép, sor látható

Automatikusan generált leírás

A picture containing text, font, screenshot, line

Description automatically generated

Szövegesen: A sorozatot konvergensnek nevezzük és a határértéke az *A* szám, ha az *A* szám bármely környezetén kívül a sorozatnak legfeljebb véges sok eleme helyezkedik el.

A két konvergencia definíció ekvivalens egymással. ((A) ⇔ (B)) (ezért elég az egyiket tudni ezek közül)

A képen szöveg, képernyőkép, Betűtípus látható

Automatikusan generált leírás

Ebből következik: a határérték is egy torlódási pont. Ha egy sorozatnak egyetlen torlódási pontja van akkor az konvergens, ha viszont több, akkor divergens.

A picture containing diagram, line, text, plot

Description automatically generated

Konvergencia definíciójának 3 következménye:

* Ha az x, y : N → R számsorozatok majdnem minden (m.m.) n indexre megegyeznek, azaz   
  ∃*N* ∈ N, hogy, ha n > N : xn = yn, akkor a két sorozat **ekvikonvergens**, azaz x akkor és csak akkor konvergens, ha y is konvergens és L(x) = L(y)
* Minden konvergens sorozat **korlátos**, de **van olyan korlátos sorozat**, amely **nem konvergens**.
  + Megjegyzés: A 2. következmény értelmében létezik olyan korlátos sorozat, amely nem konvergens. pl.: (-1)n n E N\*
* Konvergens sorozat bármely **részsorozata is konvergens**, és határértéke az eredeti sorozat határértékével egyenlő
  + Megjegyzés: Ha egy sorozat két részsorozatának határértéke különböző, akkor az eredeti sorozat divergens.

**Korlátosság**:

A képen szöveg, képernyőkép, Betűtípus, szám látható

Automatikusan generált leírás

**Monotonitás**:

A képen szöveg, képernyőkép, Betűtípus látható

Automatikusan generált leírás

Hasonlóan definiálhatóak a növekvő esetek is (a szigorú monotonitás esetén nem megengedett az egyenlőség)

Ha egy sorozat nem monoton, akkor az alábbi kategóriákba tartozhat:

* egy adott indextől kezdve monoton
* egy adott indextől kezdve sem monoton (pl. (-1)n, n E N)

**Végtelen sor definíciója és konvergenciája**

A képen szöveg, Betűtípus, képernyőkép, sor látható

Automatikusan generált leírás

A képen szöveg, Betűtípus, fehér, képernyőkép látható

Automatikusan generált leírás

A képen szöveg, Betűtípus, sor, fehér látható

Automatikusan generált leírás

A képen szöveg, Betűtípus, képernyőkép, sor látható

Automatikusan generált leírás

**II. Analitikus függvények, Taylor sor**

**Hatványsor:** Legyen x0 ∈ R rögzített szám és a = (an, n ∈ N) pedig egy valós számsorozat. Az ezekkel képzett A close-up of a mathematical equation

Description automatically generated with low confidence formális összeget **hatványsornak** nevezzük. Az (an, n ∈ N) sorozat tagjait a hatványsor **együtthatóinak**, az x0 ∈ R számot a hatványsor **konvergencia-középpontjának** nevezzük.

**Taylor sor:** Legyen az f függvény az x0 ∈ R pont valamely környezetében végtelensokszor differenciálható, ekkor a A képen szöveg, képernyőkép, Betűtípus, szám látható

Automatikusan generált leírás hatványsort x0 körüli **Taylor-sornak** nevezzük, ha az an együtthatókra teljesül, hogy A képen szöveg, képernyőkép, Betűtípus, szám látható

Automatikusan generált leírás ahol f(n)(x0) jelöli az f függvény n-edik deriváltjának x0-beli helyettesítési értékét és a0 = f(x0).

**Hatványsor összegfüggvénye:**

A picture containing text, font, screenshot, receipt

Description automatically generated

**Analitikus függvény:** Legyen H ⊆ R nyílt halmaz. Akkor mondjuk, hogy az f : H → R függvény analitikus, ha bármely a ∈ H pontnak van olyan környezete, amelyben az f előállítható hatványsor összegfüggvényeként.

**III. Függvények határértéke, folytonossága**

A picture containing text, font, white

Description automatically generated

Megjegyzés: A függvény határértéke kapcsolatba hozható a sorozat határértékével, erre alkalmas az **átviteli elv**

A screenshot of a computer

Description automatically generated with low confidence

Függvények folytonosságáról beszélhetünk egy pontban és egy intervallumon is

**Folytonosság egy adott pontban:**

Legyen az „f” függvény értelmezve az x0 pontban és annak egy környezetében. Az f függvényt az x0 pontban **folytonosnak** nevezzük, ha bármely (∀) ε>0-hoz létezik (∃) olyan δ>0, hogy ha 0<|x-x0|<δ, akkor |f(x)-f(x0)|<ε.  
Ezt szokás [**Cauchy**](https://matekarcok.hu/cauchy-augustin-louis/)-féle definíciónak is nevezni.

A fenti definícióval ekvivalens (egyenértékű) a következő definíció:

Legyen az „f” függvény értelmezve az x0 pontban és annak egy környezetében. Az f függvényt az x0 pontban folytonosnak nevezzük, ha bármely (∀) xn→x0 sorozat esetén f(xn)→ f(x0).  
Ezt szokás **Heine**-féle definíciónak is nevezni.

Ehhez az alábbiak szükségesek:

* Szükséges, hogy a függvény az adott x0 helyen és annak környezetében **értelmezve** legyen
* Az x0 pontban a függvényértékek bármely sorozatának legyen [**határértéke**](https://matekarcok.hu/fuggvenyek-hatarerteke/)
* Szükséges, hogy a függvényértékek sorozatának a x0 pontban vett **határértéke** megegyezzen az x0 pontban vett **helyettesítési** **értékkel**.

**IV. Egyváltozós valós függvények differenciálszámítása**

Akkor mondjuk, hogy az a ∈ H ⊆ R pont a **halmaz belső pontja**, ha létezik a-nak olyan Kr(a) környezete, hogy Kr(a) ⊆ H

A picture containing text, font, screenshot, white

Description automatically generated

Akkor mondjuk, hogy az f : H → R függvény az a ∈ H belső pontban **differenciálható**, ha a ∆af differenciahányados-függvénynek létezik a-ban véges határértéke. Ezt a határértéket az f függvény a pontbeli **differenciálhányadosának** (vagy deriváltjának) nevezzük:

A picture containing text, font, line, white

Description automatically generated

Tétel: Ha f **differenciálható** az a pontban, akkor ott **folytonos** is.

Megjegyzés: A **folytonosság** a **differenciálhatóságnak** **szükséges**, de **nem elégséges** feltétele. Például az f(x) = |x| függvény az x = 0 helyen folytonos, de nem differenciálható

A **műveleti tulajdonságok** segítségével elemi függvények deriváltjaival lehet tetszőleges differenciálható függvény deriváltjait származtatni!

**V. Minimum- és maximumhelyek megkeresése**

A képen szöveg, képernyőkép, Betűtípus, sor látható

Automatikusan generált leírás

A képen szöveg, Betűtípus, képernyőkép, információ látható

Automatikusan generált leírás

Mindkét szempont vizsgálható a szélsőérték létezésének elsőrendű elégséges feltételének alkalmazásakor használt **táblázattal**

A táblázat oszlopait a **kritikus pontok** (szinguláris helyek, intervallum szélső pontjai, szakadási helyek, lehetséges szélsőérték helyek) által meghatározott **intervallumok** adják

A táblázatnak két sora van, az első a derivált, a második az eredeti függvény viselkedését írja le

Lehetséges szélsőérték hely, ahol f’(x) = 0

Viselkedés alapján látjuk, hogy hol nő, illetve csökken a függvény – ha változik azon a ponton, akkor lehetséges, hogy lokális szélsőérték legyen a pont

A képen szöveg, Betűtípus, képernyőkép, sor látható

Automatikusan generált leírás

A képen szöveg, Betűtípus, képernyőkép, sor látható

Automatikusan generált leírás

A picture containing line, font, diagram, handwriting

Description automatically generated

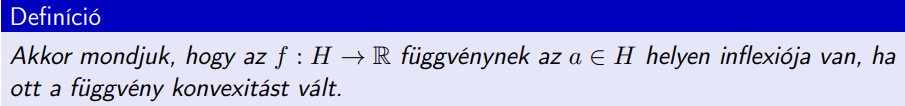
**VI. Függvények konvexitása**

A screen shot of a graph

Description automatically generated with low confidence

A screenshot of a computer

Description automatically generated with low confidence



A képen szöveg, képernyőkép, Betűtípus, szám látható

Automatikusan generált leírás

A képen szöveg, képernyőkép, Betűtípus, szám látható

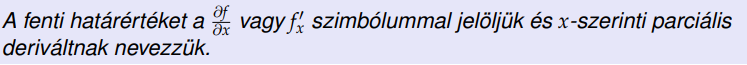
Automatikusan generált leírás

**VII. Többváltozós valós függvények differenciálszámítása**

Többváltozós – Kétváltozós függvényeken mutatjuk be, de többváltozós esetén is ugyanez lenne az eljárás

Akkor mondjuk, hogy az f kétváltozós valós függvény az értelmezési tartományának P0(x0, y0) torlódási pontjában x-szerint **parciálisan differenciálható**, ha az f(x, y0) egyváltozós valós függvény az x0-ban differenciálható, azaz ha az alábbi határérték létezik és véges:

A picture containing font, text, handwriting, line

Description automatically generated

Hasonlóan kapható az y szerinti parciális is.

A screenshot of a computer

Description automatically generated with low confidence

A picture containing text, screenshot, font, line

Description automatically generated

**Kétváltozós függvény szélsőértéke**:

A képen szöveg, képernyőkép, Betűtípus, sor látható

Automatikusan generált leírás

**VIII. Valós integrálszámítás, határozott- és határozatlan integrál**

**Határozatlan integrál**:

Legyen I ⊂ R egy intervallum és f : I → R egy intervallumon értelmezett valósértékű függvény. Akkor mondjuk, hogy a F : I → R függvény a f függvény **primitív függvénye**, ha

* F ∈ DI
* F’(x) = f(x) minden x ∈ I esetén

Tétel: Ha F a f primitív függvénye az I intervallumon és C ∈ R konstans, akkor F + C is a f primitív függvénye

Tétel: Ha F1 és F2 a f primitív függvényei az I intervallumon, akkor F1 − F2 = állandó, azaz f primitív függvényei csak **egy additív konstansban** különböznek.

Def: Legyen f : I → R olyan függvény, melynek van primitív függvénye az I intervallumon. Ekkor az f primitív függvényeinek halmazát az f **határozatlan integráljának** nevezzük. Jelölés:

A picture containing text, font, handwriting, line

Description automatically generated

ahol F az f egy primitív függvénye.

**Határozott**:

A picture containing text, screenshot, font, number

Description automatically generated

A screenshot of a computer

Description automatically generated with low confidence

A picture containing text, screenshot, font, number

Description automatically generated

A screenshot of a computer

Description automatically generated with medium confidence

A screenshot of a computer

Description automatically generated with low confidence

**Források**

A tétel kidolgozása során a Kalkulus I. és Kalkulus II. tárgyak prezentációit használtam fel, melyeket Dr. Király Balázs készített.